

Chapitre 6 Séries numériques

Exercice 1 :

(i) On a

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1,$$

donc la série converge et sa somme vaut 1.

(ii) On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=2}^N \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

donc la série converge et sa somme vaut $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(iii) On a

$$\sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \sum_{n=1}^N \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc la série diverge.

(iv) On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) &= \sum_{n=2}^N \ln \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \right) \\ &= \sum_{n=2}^N \ln(n+1) - 2 \ln(n) + \ln(n-1) \\ &= \sum_{n=2}^N \ln(n+1) - \ln(n) + \sum_{n=2}^N \ln(n-1) - \ln(n) \\ &= \ln(N+1) - \ln(2) - \ln(N) = \ln(2) + \ln \left(1 + \frac{1}{N} \right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\ln(2), \end{aligned}$$

donc la série converge et sa somme vaut $-\ln(2)$.**Exercice 2 :**(i) Si $|x| \geq 1$, alors la suite $u_k = kx^k$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum kx^k$ est divergente.(ii) Pour $|x| < 1$, on a l'égalité

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

En dérivant cette égalité, on trouve

$$\sum_{k=0}^n kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2},$$

puis en multipliant par x , on obtient

$$\sum_{k=0}^n kx^k = x \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

(iii) Comme $|x| < 1$, on obtient avec l'égalité précédente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n kx^k = \frac{x}{(1-x)^2},$$

donc la série $\sum kx^k$ converge et sa somme vaut $\frac{x}{(1-x)^2}$.

Exercice 3 :

(i) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{n+1}{n!} &= \sum_{n=0}^N \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 2e, \end{aligned}$$

donc la série converge et sa somme vaut $2e$.

(ii) En écrivant $n^2 - 2 = n(n-1) + n - 2$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{n^2 - 2}{n!} &= \sum_{n=0}^N \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{n}{n!} - 2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} - 2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} - 2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

donc la série converge et sa somme vaut 0.

(iii) En écrivant

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n,$$

on obtient en procédant comme ci-dessus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n=0}^N \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3 \sum_{n=0}^N \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{n}{n!} \\ &= \sum_{n=3}^N \frac{1}{(n-3)!} + 3 \sum_{n=2}^N \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{N-3} \frac{1}{n!} + 3 \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 5e, \end{aligned}$$

donc la série converge et sa somme vaut $5e$.

Exercice 4 : On note u_n le terme général de la série.

(i) On distingue trois cas.

- Cas $|a| > 1$. Dans ce cas, on a

$$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|a|^n}{a^{2n}} = \frac{1}{|a|^n}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{|a|^n}$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

- Cas $|a| = 1$. La suite (u_n) ne converge pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Cas $|a| < 1$. Dans ce cas, on a

$$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|a|^n}{.}$$

Or la série $\sum |a|^n$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Finalement, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $|a| \neq 1$.

(ii) La suite u_n est strictement positive. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{a(n+1)}} \cdot \frac{n^{an}}{n!} = (n+1)^{1-a} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{an}.$$

De plus, on a avec un développement limité

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{an} &= \exp\left(na \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{na}{n+1} + o\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(-a). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a < 1 \\ e^{-1} & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

Finalement, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a \geq 1$.

Exercice 5 : On a l'inégalité

$$\forall t \in [0, \pi], \quad 0 \leq \frac{\sin(t)}{1+t} \leq \frac{t}{1+t} \leq t,$$

donc en intégrant, on obtient

$$0 \leq u_n \leq \int_0^{\pi/n} t dt = \frac{\pi^2}{n^2}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum u_n$ est convergente par comparaison.

Exercice 6 : On note (u_n) le terme général de la série que l'on étudie.

(i) La suite (u_n) est positive et on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} 2/n^2$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

(ii) On a l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n| \leq \frac{2}{2^n}.$$

Or $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

(iii) On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} 1$, donc la suite (u_n) ne converge pas vers 0 et $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(iv) La suite $(|u_n|)$ est strictement positive et on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^4}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} < 1,$$

donc la série $\sum u_n$ converge absolument d'après la règle de d'Alembert, donc elle converge.

(v) La suite (u_n) est positive. En multipliant par l'expression conjuguée, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n^4-1} (\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

Or $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

(vi) Avec un développement limité, on a

$$\begin{aligned} u_n &= e - \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = e - \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e - e \cdot \exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e - e\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n} \geq 0. \end{aligned}$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc $\sum u_n$ diverge par comparaison.

(vii) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$ par croissance comparée, donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand

$$0 \leq n^2 u_n \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

(viii) En utilisant l'inégalité $\sin(x) \leq x$ et en majorant le cos par 1, on obtient

$$0 \leq |u_n| \leq \frac{\pi}{n^2}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge absolument par comparaison, donc elle converge.

(ix) La suite (u_n) est positive et on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \pi^2/2n^2$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

(x) La suite u_n est strictement positive et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

De plus, on a avec un développement limité

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{n}{n+1} + o\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(-1). \end{aligned}$$

On en déduit que (u_{n+1}/u_n) converge vers $e^{-1} < 1$, donc la série $\sum u_n$ converge d'après le règle de d'Alembert.

(xi) La suite (u_n) est positive et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$ par croissance comparée. On en déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand, on a

$$0 \leq n^2 u_n \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

(xii) La suite (u_n) est strictement positive et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)^2}}{n^n e^{-n^2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) e^{-2n-1}.$$

De plus, on a avec un développement limité

$$\left(1 - \frac{1}{nn}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \exp(1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e.$$

On en déduit que (u_{n+1}/u_n) converge vers $0 < 1$, donc la série $\sum u_n$ converge d'après le règle de d'Alembert.

(xiii) La suite (u_n) diverge vers $+\infty$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(xiv) En utilisant la formule d'addition du sinus, on a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

On en déduit que $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \pi/n^2$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge absolument par comparaison, donc elle converge.

(xv) La suite (u_n) est strictement positive. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 \sin(\pi/2^{n+1})}{n^2 \sin(\pi/2^n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi/2^{n+1}}{\pi/2^n} = \frac{1}{2} < 1,$$

donc $\sum u_n$ converge d'après la règle de d'Alembert.

(xvi) On a l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \leq u_n.$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc $\sum u_n$ diverge par comparaison.

(xvii) On a l'inégalité

$$0 \leq u_n \leq \frac{(n-1)(n-1)! + n!}{(n+2)!} \leq \frac{(n-1)}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

(xviii) La suite (u_n) est strictement positive et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n) \cdot (2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{n}{n+1} + o\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(-1). \end{aligned}$$

On en déduit que (u_{n+1}/u_n) converge vers $2e^{-1} < 1$, donc la série $\sum u_n$ converge d'après le règle de d'Alembert.

Exercice 7 :

1. On déterminer un équivalent de (u_n) en utilisant des développements limités. On a

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\ln(n+2) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \ln(n) + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit

$$u_n = (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Si $a+b \neq -1$, alors la suite (u_n) ne converge pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $a+b = -1$ et $a+2b \neq 0$, alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a+2b}{n} = v_n.$$

Or la suite (v_n) est de signe constant et la série $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc la série $\sum u_n$ diverge.

- Si $a+b = -1$ et $a+2b = 0$ équivaut à $a = -2$ et $b = 1$. Dans ce cas, on a

$$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Finalement $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = -2$ et $b = 1$.

2. Pour calculer la somme de la série, on calcule la suite des sommes partielles.
Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2) \\ &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - \ln(n+1) + \sum_{n=1}^N \ln(n+2) - \ln(n+1) \\ &= \ln(1) - \ln(N+1) + \ln(N+2) - \ln(2) = -\ln(2) + \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\ln(2), \end{aligned}$$

donc la somme de la série $\sum u_n$ vaut $-\ln(2)$.

Exercice 8 : On détermine un équivalent de (u_n) en utilisant des développements limités. On a

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n^3 + an} &= n \left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{1/3} = n \left(1 + \frac{a}{3n^2} - \frac{a^2}{9n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= n + \frac{a}{3n} - \frac{a^2}{9n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 3} &= n \left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{1/2} = n \left(1 + \frac{3}{2n^2} - \frac{9}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= n + \frac{3}{2n} - \frac{9}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

On en déduit

$$u_n = \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{9}{8} - \frac{a^2}{9}\right) \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

- Si $a \neq 9/2$, on obtient

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n} = v_n.$$

Or la suite (v_n) est de signe constant et $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc la série $\sum u_n$ diverge.

- Si $a = 9/2$, on obtient

$$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{9}{8n^3}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Finalement $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = 9/2$.

Exercice 9 :

- (i) On a l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n.$$

Or la série $\sum (u_n + v_n)$ est convergente, donc $\sum \max(u_n, v_n)$ est convergente par comparaison.

- (ii) On a l'inégalité

$$0 \leq (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Or la série $\sum (u_n + v_n)$ est convergente, donc $\sum \sqrt{u_n v_n}$ est convergente par comparaison.

- (iii) En utilisant la même inégalité que dans (ii), on a

$$0 \leq \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leq \frac{u_n^2}{2(u_n + v_n)} + \frac{v_n^2}{2(u_n + v_n)} \leq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Or la série $\sum (u_n + v_n)$ est convergente, donc $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ est convergente par comparaison.

Exercice 10 :

1. La suite (u_n) est positive, donc $0 \leq e^{-u_{n-1}} \leq 1$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

On en déduit avec le théorème d'encadrement que (u_n) converge vers 0.

2. Comme (u_n) converge vers 0, on a

$$u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Or la suite (u_n) est positive et $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc $\sum u_n$ est divergente par comparaison.

Exercice 11 : On montre les deux implications.

- Si $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0. On en déduit que $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$, donc $\sum v_n$ converge par comparaison.
- Réciproquement, si $\sum v_n$ converge, alors la suite (v_n) converge vers 0. De plus, on peut écrire

$$(1 + u_n)v_n = u_n \quad \Leftrightarrow \quad v_n = u_n(1 - v_n),$$

donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, donc $\sum v_n$ converge par comparaison.

Exercice 12 :

1. Si $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0. On en déduit que $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$, donc $\sum v_n$ converge par comparaison.
2. Si $u_n = n^2$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement. D'autre part $v_n \underset{+\infty}{\sim} 1/n^2$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum v_n$ converge par comparaison. Ainsi, la réciproque est fautive.

3. On note $M > 0$ un majorant de la suite (u_n) . On a alors

$$0 \leq u_n \leq (1 + u_n^2)v_n \leq (1 + M^2)v_n.$$

Ainsi, si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge par comparaison.

Exercice 13 :

(i) La fonction

$$f : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{t \ln(t)}$$

est continue, décroissante et positive. D'après le théorème de comparaison série - intégrale, on en déduit que

$$\sum \frac{1}{n \ln(n)} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)} \text{ converge.}$$

Or pour tout réel $\beta > 2$, on a

$$\int_2^\beta \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_2^\beta = \ln(\ln(\beta)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi l'intégrale I est divergente, donc la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ est divergente.

(ii) La fonction

$$f : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{t \ln^a(t)}$$

est continue et positive. De plus, f est dérivable et on a

$$\forall t \in [2, +\infty[, \quad f'(t) = \frac{\ln^{a-1}(t)(a + \ln(t))}{t^2 \ln^{2a}(t)}.$$

Comme $f'(t) \leq 0$ au voisinage de $+\infty$, on en déduit que f est décroissante au voisinage de $+\infty$. D'après le théorème de comparaison série - intégrale, on en déduit que

$$\sum \frac{1}{n \ln^a(n)} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad I_a = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^a(t)} \text{ converge.}$$

Or pour tout réel $\beta > 2$, comme $a \neq 1$, on a

$$\int_2^\beta \frac{dt}{t \ln^a(t)} = \left[\frac{\ln^{1-a}(t)}{1-a} \right]_2^\beta = \frac{\ln^{1-a}(\beta)}{1-a} - \frac{\ln^{1-a}(2)}{1-a}.$$

En prenant la limite lorsque a tend vers $+\infty$, on en déduit que I_a converge si et seulement si $a > 1$. Finalement, la série $\sum \frac{1}{n \ln^a(n)}$ converge si et seulement si $a > 1$.

(iii) La fonction

$$f : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{t \ln(t) \ln(\ln(t))}$$

est continue, décroissante et positive. D'après le théorème de comparaison série - intégrale, on en déduit que

$$\sum \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))} \text{ converge} \Leftrightarrow I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t) \ln(\ln(t))} \text{ converge.}$$

Or pour tout réel $\beta > 2$, on a

$$\begin{aligned} \int_2^\beta \frac{dt}{t \ln(t) \ln(\ln(t))} &= [\ln(\ln(\ln(t)))]_2^\beta \\ &= \ln(\ln(\ln(\beta))) - \ln(\ln(\ln(2))) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale I est divergente, donc la série $\sum \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$ est divergente.

Exercice 14 : En encadrant les sommes avec des intégrales, on trouve

$$\begin{aligned} (i) \quad S_n &\underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}, & (ii) \quad S_n &\underset{+\infty}{\sim} \ln(n), & (iii) \quad R_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \\ (iv) \quad S_n &\underset{+\infty}{\sim} n \ln(n), & (v) \quad R_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}, & (vi) \quad S_n &\underset{+\infty}{\sim} n \ln^2(n), \\ (vii) \quad U_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{4\sqrt{2}-2}{3} n\sqrt{n}, & (viii) \quad S_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 15 :

1. On a l'équivalent

$$\left| \frac{a}{n^2 + a^2} \right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{n^2}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série définissant $S(a)$ converge absolument par comparaison, donc elle converge.

2. La fonction $t \mapsto a/(t^2 + a^2)$ est décroissante et continue, donc on obtient l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \int_n^{n+1} \frac{a dt}{t^2 + a^2} \leq \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{a dt}{t^2 + a^2}.$$

En sommant ces inégalités pour $1 \leq n \leq N$, on obtient

$$\int_1^{N+1} \frac{a dt}{t^2 + a^2} \leq \sum_{n=1}^N \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \int_0^N \frac{a dt}{t^2 + a^2}.$$

En calculant les intégrales, on obtient

$$\left[\text{Arctan} \left(\frac{t}{a} \right) \right]_1^{N+1} \leq \sum_{n=1}^N \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \left[\text{Arctan} \left(\frac{t}{a} \right) \right]_0^N,$$

puis en faisant tendre N vers $+\infty$, on a

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(\frac{1}{a} \right) \leq S(a) \leq \frac{\pi}{2}.$$

3. Finalement, dans l'inégalité précédentes, les membres de droites et gauches tendent vers $\pi/2$ lorsque $a \rightarrow +\infty$. On en déduit avec le théorème d'encadrement que $\lim_{a \rightarrow +\infty} S(a) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 16 :

1. On montre que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

- La suite (u_n) est décroissante, car

$$u_{n+1} - u_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq 0.$$

- La suite (v_n) est croissante, car

$$u_{n+1} - u_n = (H_{n+1} - \ln(n+2)) - (H_n - \ln(n+1)) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t} \geq 0.$$

- On a

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Finalement, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. Comme les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent vers un réel γ . Autrement dit, on a $u_n = \gamma + o(1)$, ce qui donne $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
3. En utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=an}^{bn} \frac{1}{k} &= H_{bn} - H_{an} + \frac{1}{an} = (\ln(bn) + \gamma) - (\ln(an) + \gamma) + o(1) \\ &= \ln\left(\frac{b}{a}\right) + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$